УДК 510 – 378

В. Г. ВОЙТКОВ, Л. О. ГЕРАСИМЧУК
Хмельницький національний університет

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В роботі окреслено математичні проблеми, які виникають при розробці завдань для контрольних робіт та екзаменів.

This paper outlines the mathematical problems that arise in the preparation of tasks for control tests and examinations.

Ключові слова: вища математика, контрольна робота, екзамен.

Згідно з історичною традицією, геометрія з’явилася у Стародавньому Єгипті внаслідок практичної потреби відновлення меж земельних ділянок, які постійно знищувались розливами Нілу. Так само, практика азартних ігор призвела до появи теорії імовірностей. Ми звернемось до практики викладання вищої математики і спробуємо окреслити деякі математичні проблеми, які при цьому виникають. Звичайно, автори не претендують на вичерпний аналіз, а тим більше на створення якогось нового, особливого розділу математики. Тим не менш, доцільно вирізнити ці проблеми серед інших задач, з одного боку, завдяки їх практичній спрямованості, а з іншого – особливостям математичної постановки цих задач.

Вища освіта в другій половині XX століття, особливо на початку XXI століття, набула масового, навіть загального характеру. Тенденція зрозуміла – ускладнення способу виробництва і, відповідно, суспільних відносин вимагає більш високого рівня знань. Це призводить до збільшення кількості студентів взагалі, а також до збільшення кількості студентів на одного викладача. Особливо це збільшення відчувається викладачами фундаментальних дисциплін (математики, фізики тощо). Певною мірою ситуацію вдається врегулювати за допомогою застосування, так званих, інформаційних технологій навчання.

За допомогою комп’ютерів і спеціалізованого програмного забезпечення вдається майже повністю вирішити питання забезпечення студентів джерелами інформації (книгами, статтями, навіть лекціями у відеозаписі), а також частково здійснювати контроль засвоєння її студентами. Частково, оскільки ряд задач не може бути викладений у вигляді тестів принципово. Зокрема, до таких задач відносяться задачі побудови графіків та геометричних фігур, а також задачі на доведення. Слід відзначити, що доведення займає особливе місце в математиці, за образним висловом М. Бурбакі [1]: "З часів греків говорити «математика» – це значить говорити «доведення»". В цій роботі ми не будемо розглядати питання про те, наскільки адекватно вдається з’ясувати рівень знань студентів за допомогою тестування на комп’ютері (мова йде лише про математику), а розглянемо ті вимоги, яким повинні задовольняти задачі, що використовуються для оцінки знань студентів, а також проблеми, що виникають при цьому.

Процеси контролю знань та навичок студента повинні бути такими, щоб охоплювати всю дисципліну або, принаймні, головні її частини. Крім того, оскільки всі студенти повинні знаходитись в рівних умовах при складанні екзамену (заліку і т.д.), то завдання повинні містити фіксований за типами список задач приблизно однакової складності. Тут виникає перша проблема оцінки складності завдань. Коли результати роботи оцінює викладач, він користується суб’єктивною оцінкою складності. Для оцінювання за допомогою комп’ютера необхідний чіткий і строгий критерій складності. Цей критерій може ґрунтуватись як на кількості операцій, так і на кількості перетворень та теорем (відомостей), необхідних для розв’язання задачі. Вироблення такого критерію і оцінка за ним завдань є первинною проблемою, оскільки вона накладає вимоги на параметри задач.

В процесі викладання курсу вищої математики викладач постає перед необхідністю розробки завдань для практичних занять, контрольних робіт, індивідуальних домашніх завдань тощо. Для практичних занять задачі можна взяти готові зі збірників задач, які є в бібліотеках і також доступні в Інтернет. Але питання ускладнюється, коли мова йде про задачі для контрольних робіт та екзаменаційних білетів чи тестів. По-перше, в більшості збірників задач (наприклад, в [2 – 4]) не більше ніж 2-3 однотипні задачі, тобто їх занадто мало, щоб використати безпосередньо для тестів чи контрольних робіт. По-друге, у спеціалізованих збірниках, що містять задачі саме для таких видів контролю (по 30 варіантів задач [5]), завдання часто неоднорідні в тому розумінні, що вони різної обчислювальної складності. Так, одна справа, коли на якомусь етапі потрібно розв’язати квадратне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, а зовсім інша, коли потрібно розв’язати $23x^2 + 115x - 37 = 0$, і використати одержані корені в подальшому процесі розв’язку. Для уникнення описаної вище ситуації, слід таким чином підбирати параметри задач, щоб на усіх етапах їх розв’язання не виникали громіздкі другорядні обчислення, які створюють додаткові труднощі для студента і займають час тестування. Натомість можна було б додати задачі, які стосуються розглядуваної теми, а не примушувати студента витрачати значну частину робити на громіздкі елементарні перетворення, які йому повинні бути відомі ще зі школи.

В більшості випадків, формують базу "оптимальних" задач, з яких обирають (за певним правилом або навмання) задачі для конкретного завдання. Це дозволяє надати кожному студенту окреме (індивідуальне) завдання на контрольних заходах. Такий підхід може здійснюватись як з використанням комп’ютерів, так і без них – за допомогою паперових носіїв. Але він має і певний недолік – база задач має фіксований об’єм і передбачається тривалий час її використання. Це призводить до того, що відповіді на задачі, навіть і розв’язки, можуть бути відомі тим, хто складає дисципліну, ще перед проведенням контрольного заходу. Особливо негативно цей недолік може проявитись при проведенні стандартних тестів на комп'ютері, коли із запропонованих відповідей потрібно обрати одну вірну. Зрозуміло, коли відповідь відома наперед, то немає необхідності розв'язувати задачу. Це спричиняє нівелювання контрольного заходу.

Уникнути цього можна за рахунок автоматичної генерації задач із заданими параметрами безпосередньо при проведенні тестування. Є досить обмежена кількість комп'ютерних програм, що здатні здійснювати таку генерацію. Але, на жаль, вони або не мають належної універсальності, щоб генерувати широкий клас задач, або генерують завдання різного рівня складності. Це зрозуміло, оскільки не є розробленими математичні питання створення завдань, а отже, немає і алгоритмів, за якими ці завдання мають створюватись.

Можна знайти масу літератури, в якій описано, як розв'язувати задачі, і майже відсутня література про те, як задачі складати. Чомусь вважається, що це є очевидною справою. Можна вказати лише одиничні роботи в цьому напрямку [6, 7].

Суть математичних проблем, що виникають при розробці завдань ми покажемо на прикладі складання простої задачі, що пов'язана з дослідженням поведінки функції.

Розглянемо задачу дослідження функції з метою побудови її графіка. Найпростішою з таких функцій є функція, що являє собою многочлен: $f(x)=P_n(x)=a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n$. Основні моменти дослідження – це знаходження точок перетину графіка функції з осями координат, а також точок екстремуму і точок перегину. Зрозуміло, що генерація степеня многочлена та його коефіцієнтів як довільних цілих чисел призведе до того, що задача може бути не розв'язною без застосування наближених методів знаходження коренів рівнянь або громіздких формул для коренів рівнянь 3-го і 4-го степенів, які студентам невідомі. Це накладає певні обмеження на степінь рівняння та коефіцієнти. З іншого боку, для того, щоб графік функції мав хоча б одну точку перегину, потрібно, щоб друга похідна $f''(x)$ не дорівнювала тотожно сталій, а була б щонайменше многочленом 1-го степеня: $f''(x)=P_1(x)=ax+b$. Звідси випливає, що $\deg P_n(x)\ge 3$, де через $\deg P_n(x)$ позначено степінь многочлена.

Поставимо задачу знайти цілі значення коефіцієнтів многочлена $P_n(x)$ такі, щоб рівняння $f(x)=0$, $f'(x)=0$ мали цілі корені. Розглянемо задачу для многочлена з найменшим степенем $\deg P_n(x)=3$, що задовольняє поставленим вище вимогам. При цьому візьмемо приведений многочлен, тобто $a_0=1$, з тим, щоб студент міг знайти його корені, скориставшись теоремою Вієта. Таким чином,

$$f(x)=P_3(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\text{, де } a,b,c\in Z\,,$$

або

$$f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc\,.$$

Обчислюючи похідну $f'(x)$, матимемо

$$f'(x)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+ac+bc)\,.$$

Похідна має два цілі корені тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)}}{3}=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}\in Z\,. \tag{1}$$

Ми одержали умову для цілочислових коренів a, b, c, виконання якої забезпечує цілі корені в похідної многочлена 3-го степеня. Звичайно, найкращим варіантом умови є умова записана у вигляді $a=\varphi_1(n)$, $b=\varphi_2(n)$, $c=\varphi_3(n)$, тобто, корені a, b, c є параметризованими за допомогою деякої цілочислової змінної, але це потребує додаткових теоретичних досліджень і в загальному випадку може виявитись досить проблематичним. Тим не менш, умова (1) є цілком достатньою для створення алгоритму розрахунку коефіцієнтів многочлена за допомогою комп'ютера. Приклад реалізації такого алгоритму в середовищі MathCAD наведено нижче.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$f(a,b,c) := a^2 + b^2 + c^2 - a\cdot b - a\cdot c - b\cdot c$$

```
y(α, β, γ) := | i ← 0
              | a0 ← α
              | b0 ← β
              | c0 ← γ
              | for a ∈ -a0 .. a0
              |   for b ∈ -b0 .. b0
              |     for c ∈ -c0 .. c0
              |       | n ← √f(a, b, c)
              |       | if floor(n) = n
              |       |   | u ← (a + b + c − n) / 3
              |       |   | v ← (a + b + c + n) / 3
              |       |   | if floor(v) = v  if floor(u) = u
              |       |   |   | i ← i + 1
              |       |   |   | x[i,1] ← a
              |       |   |   | x[i,2] ← b
              |       |   |   | x[i,3] ← c
              |       |   |   | x[i,4] ← u
              |       |   |   | x[i,5] ← v
              | x

z(θ) := | s ← 0
        | m ← rows(θ)
        | for i ∈ 1 .. m
        |   if θ[i,1] ≠ θ[i,3]          if θ[i,2] ≠ θ[i,3]  if θ[i,1] ≠ θ[i,2]
        |     | s ← s + 1
        |     | z[s,1] ← θ[i,1]
        |     | z[s,2] ← θ[i,2]
        |     | z[s,3] ← θ[i,3]
        |     | z[s,4] ← −(θ[i,1] + θ[i,2] + θ[i,3])
        |     | z[s,5] ← θ[i,1]·θ[i,2] + θ[i,1]·θ[i,3] + θ[i,2]·θ[i,3]
        |     | z[s,6] ← −(θ[i,1]·θ[i,2]·θ[i,3])
        | z
```

$$A := y(10, 10, 10)$$

$$z(A) =$$

Функція $y(\alpha,\beta,\gamma)$ обчислює матрицю, стовпцями якої відповідно є цілі корені рівнянь $P_3(x)=0$ і $P_3'(x)=0$. Оскільки серед розв'язків є багато таких, де корені співпадають, то застосовуючи до одержаної матриці функцію $z(\theta)$, одержуємо матрицю, в стовпцях якої знаходяться лише різні трійки коренів, а також відповідні коефіцієнти многочлена.

Цікаво відмітити, що коли корені a,b,c змінюються в межах від -10 до 10, то не існує серед них такої трійки, щоб похідна мала різні цілі корені. В той же час, якщо межі збільшити від -15 до 15, таких трійок є 84, а з врахуванням перестановок – всього 14. Крім того, що шуканих трійок коренів мало, виявляється, що коефіцієнти a_2, a_3 многочлена будуть трьохзначними числами, що ускладнює процес знаходження коренів рівняння $P_3(x)=0$ для студента. В результаті виходить, що зробити студенту цілочисловий "рай" під час складання тесту не вдасться. Тому прийдеться пропонувати завдання більшої складності, наклавши вимогу раціональності коренів (1). Тоді замість умови (1) будемо користуватись умовою

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \in Z \ . \tag{2}$$

Зі сказаного вище, можна зробити наступні висновки:

1. Для автоматичного оцінювання необхідно розробити строгі алгоритмічні критерії складності задач, які, з одного боку, будуть слугувати основою для оцінювання відповідей студентів, а з іншого – умовою, що буде накладатись на алгоритм генерації цих задач.

2) Теорія формування задач, зокрема задач заданої складності, є майже не розробленою, хоча є велика практична потреба в розробці такої теорії. Тобто необхідна книга, у якій викладач чи програміст змогли би прочитати, як скласти задачу того чи іншого типу. Результати розробки елементів такої теорії автори мають намір навести у наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Бурбаки Н. Начала математики. Кн. 1. Теория множеств / Бурбаки Н. – М. : Наука, 1965. – 455 с.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Клетеник Д.В. – М. : Наука, 1975. – 240 с.

3. Сборник задач по математике для ВТУЗов / [под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича]. – М. : Наука, 1981. – 367 с.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / [под ред. Б.П. Демидовича]. – М. : Наука, 1972. – 472 с.

5. Рудницький В.Б. Практичні заняття з курсу вищої математики. Ч. І / В.Б. Рудницький, І.І. Кантемір. – Хмельницький : ТУП, 1999. – 437 с.

6. Посов И.А. Автоматическая генерация задач / И.А. Посов // Компьютерные инструменты в образовании. – 2007. – № 1. – С. 54 – 62.

7. Левинская М.А. Автоматизированная генерация заданий по математике для контроля знаний учащихся / М.А. Левинская // Educational Technology & Society. – 2002. – № 5 (4). – С. 214 – 221.